Loi d'inertie de Sylvester et classification des formes quadratiques sur $\mathbb{R}$:

I Le développement

Le but de ce développement est de démontrer quelques résultats sur la signature d'une forme quadratique réelle.

Dans tout ce développement, on considère E un espace vectoriel de dimension finie notée n et q une forme quadratique sur E et φ la forme bilinéaire associée.

Théorème 1 : [Rombaldi, p.468]
Soit F un sous-espace vectoriel de E.
$*$ On a $\dim(F) + \dim\left(F^{\perp}\right) \geq \dim(E)$ avec égalité lorsque q est non dégénérée.
$*$ On a $E = F \oplus F^{\perp}$ si, et seulement si, $q|_F$ est non dégénérée.

Preuve :
Soit F un sous-espace vectoriel de E.
$*$ Montrons le premier point :
- Si $F = \{0_E\}$, alors $F^{\perp} = E$ et ainsi $\dim(F) + \dim\left(F^{\perp}\right) \geq \dim(E)$ (et l'égalité peut être réalisée si q est dégénérée).

- Sinon, on considère $(e_i)_{i\in[\![1;p]\!]}$ une base de F et pour tout $i \in [\![1;p]\!]$, on pose $\ell_i = \varphi(\cdot, e_i) \in E^*$. On a alors :

$$\begin{aligned} F^{\perp} &= \{x \in E \text{ tq } \forall y \in F,\ \varphi(x,y) = 0\} = \{x \in E \text{ tq } \forall i \in [\![1;p]\!],\ \varphi(x, e_i) = 0\} \\ &= \bigcap_{i=1}^{p} \mathrm{Ker}(\ell_i) = \mathrm{Ker}(f) \text{ avec } f = (\ell_1, ..., \ell_p) \end{aligned}$$

Ainsi, on a :

$$\dim\left(F^{\perp}\right) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) = \dim(E) - \mathrm{rg}(f) \geq \dim(E) - p = \dim(E) - \dim(F)$$

Or, si q est non dégénérée, alors $(\ell_i)_{i\in[\![1;p]\!]}$ est une famille libre, donc $\mathrm{rg}(f) = p$ et $\dim(F) + \dim\left(F^{\perp}\right) = \dim(E)$.

$*$ Montrons le deuxième point :
- Si $E = F \oplus F^{\perp}$, alors $F \cap F^{\perp} = \{0_E\}$ et donc :

$$\ker\left(q|_F\right) = \{x \in F \text{ tq } \forall y \in F,\ \varphi(x,y) = 0\} = \{0_E\}$$

Ainsi, $q|_F$ est non dégénérée.

- Si $q|_F$ est non dégénérée, alors $F \neq \{0_E\}$.
Soient $(e_i)_{i\in[\![1;p]\!]}$ une base de F et $(\ell_i)_{i\in[\![1;p]\!]} = (\varphi(\cdot, e_i))_{i\in[\![1;p]\!]} \in (E^*)^p$.
La famille $(\ell_i)_{i\in[\![1;p]\!]}$ est alors libre et on a $\dim\left(F^{\perp}\right) = \dim(E) - \dim(F)$ (c'est-à-dire $\dim\left(F^{\perp}\right) + \dim(F) = \dim(E)$). De plus, on a $F \cap F^{\perp} = \mathrm{Ker}\left(q|_F\right) = \{0_E\}$.
Ainsi, on a $E = F \oplus F^{\perp}$.

■

Théorème 2 : [Rombaldi, p.476]
Il existe un unique couple (s,t) d'entiers naturels tels que, pour toute base q-orthogonale $(e_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ de E on ait les égalités $s = \mathrm{Card}(\{i \in [\![1;n]\!] \text{ tq } q(e_i) > 0\})$ et $t = \mathrm{Card}(\{i \in [\![1;n]\!] \text{ tq } q(e_i) < 0\})$.
De plus, on a la relation $s + t = \mathrm{rg}(q)$.

Preuve :
Soient $\mathcal{B} = (e_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ et $\mathcal{B}' = (e'_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ deux bases q-orthogonales de E.
Quitte à réordonner, on peut supposer que :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(q) = \mathrm{diag}(\underbrace{>0, ..., >0}_{s}, \underbrace{<0, ..., <0}_{t}, \underbrace{0, ..., 0}_{n-s-t})$$

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(q) = \mathrm{diag}(\underbrace{>0, ..., >0}_{s'}, \underbrace{<0, ..., <0}_{t'}, \underbrace{0, ..., 0}_{n-s'-t'})$$

On constate alors que l'on a directement que $s + t = s' + t' = \mathrm{rg}(q)$.

Posons $F = \mathrm{Vect}(\{e_i,\ i \in [\![1;s]\!]\})$ et $G' = \mathrm{Vect}(\{e'_i,\ i \in [\![s'+1;n]\!]\})$.
- Si $s = 0$ ou $s' = n$, alors $F = \{0_E\}$ ou $G' = \{0_E\}$ et donc $F \cap G' = \{0_E\}$.

- Sinon, on a :

$$\exists \lambda_1, ..., \lambda_s \in \mathbb{R}_+^* \text{ tq } \forall x \in F \setminus \{0_E\},\ q(x) = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i x_i^2 > 0$$

$$\exists \lambda_{s+1}, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}^- \text{ tq } \forall x \in G',\ q(x) = \sum_{i=s'+1}^{n} \lambda_i x_i^2 \leq 0$$

Ainsi, on a $F \cap G' = \{0\}$.

Dans tous les cas, on a $F \cap G' = \{0\}$ et donc :

$$\dim(F \oplus G') = \dim(F) + \dim(G') = s + (n - s') \leq \dim(E) = n$$

Ainsi, on a $s \leq s'$ et on montre de même que $s \geq s'$ et finalement on a $s = s'$ et donc $t = t'$.

■

Théorème 3 : [Rombaldi, p.477]
Si l'on définit les ensembles $\mathcal{P}$ et $\mathcal{N}$ par $\mathcal{P} = \{F \text{ s.e.v. tq } q|_F \text{ définie positive}\}$ et $\mathcal{N} = \{F \text{ s.e.v. tq } q|_F \text{ définie négative}\}$, alors la signature (s,t) de q est donnée par :

$$s = \begin{cases} 0 \text{ si } \mathcal{P} = \emptyset \\ \max\limits_{F\in\mathcal{P}} \dim(F) \text{ sinon} \end{cases} \quad \text{et } t = \begin{cases} 0 \text{ si } \mathcal{N} = \emptyset \\ \max\limits_{F\in\mathcal{N}} \dim(F) \text{ sinon} \end{cases}$$

Preuve :
Notons :

$$s' = \begin{cases} 0 \text{ si } \mathcal{P} = \emptyset \\ \max\limits_{F\in\mathcal{P}} \dim(F) \text{ sinon} \end{cases} \quad \text{et } t' = \begin{cases} 0 \text{ si } \mathcal{N} = \emptyset \\ \max\limits_{F\in\mathcal{N}} \dim(F) \text{ sinon} \end{cases}$$

Soient q une forme quadratique sur E et $(e_1, ..., e_n)$ une base de E dans laquelle la forme quadratique q s'écrit $q(x) = \sum_{i=1}^{s} x_i^2 - \sum_{i=s+1}^{s+t} x_i^2$.
En considérant le sous-espace $A = \text{Vect}(e_1, ..., e_s)$, on obtient que q est définie positive sur A et donc $s' \geq s$ et on a de même que $t' \geq t$.

Soient B le sous-espace vectoriel engendré par $e_{s+1}, ..., e_n$ et F n'importe quel sous-espace vectoriel de E tel que $q|_F$ soit définie positive.
L'intersection $F \cap B$ est alors réduite à $\{0_E\}$ et donc :

$$\dim(F) + \dim(B) = \dim(F+B) + \dim(F\cap B) = \dim(F+B) \leq \dim(E) = n$$

En particulier on a donc $s' + (n-s) \leq n$, soit $s' \leq s$.

Finalement, on a $s = s'$ et de même on montre que $t = t'$.

■

II Remarques sur le développement

II.1 Résultat(s) utilisé(s)

Dans ce développement, on a utilisé quelques notions sur les formes quadratiques telles que la dégénérescence et les bases q-orthogonales. On donne alors ci-dessous quelques rappels sur ces points.

II.1.1 Forme quadratique non dégénérée

Définition 4 : Cône isotrope [Rombaldi, p.466] :
On appelle **cône isotrope de** φ l'ensemble des vecteurs $x \in E$ tels que l'on ait $q(x) = \varphi(x,x) = 0$ et on le note C_φ.

Définition 5 : Noyau d'une forme bilinéaire [Rombaldi, p.466] :
On appelle **noyau de** φ l'orthogonal de E.

Autrement dit, on a :

$$\text{Ker}(\varphi) = E^\perp = \{x \in E \text{ tq } \forall y \in E,\ \varphi(x,y) = 0\}$$

Ce noyau est un sous-espace vectoriel de E et on dit aussi que $\text{Ker}(\varphi)$ est le noyau de la forme quadratique q.

Lemme 6 : [Rombaldi, p.466]
Le noyau de φ est contenu dans le cône isotrope de φ.

Preuve :
Si $x \in \text{Ker}(\varphi)$, alors x est orthogonal à tout vecteur de E, donc en particulier à lui-même. Ainsi, x appartient au cône isotrope de φ.

■

Remarque 7 : [Rombaldi, p.467]
Pour calculer le noyau de φ en dimension finie, on peut résoudre le système $AX = 0$.

Définition 8 : Forme bilinéaire symétrique non dégénérée [Rombaldi, p.467] :
On dit que φ est une **forme bilinéaire symétrique non dégénérée** lorsque son noyau est réduit à $\{0_E\}$.

En dimension finie, une forme bilinéaire symétrie est non dégénérée si, et seulement si, sa matrice dans une base quelconque de E est inversible (ce qui est équivalent à dire que son discriminant dans une base quelconque est non nul).

Remarque 9 : [Rombaldi, p.467]
La restriction de q à un sous-espace vectoriel F de E est non dégénérée si, et seulement si, $F \cap F^\perp = \{0\}$.

Définition 10 : Forme quadratique définie [Rombaldi, p.467] :
On dit que q est une **forme quadratique définie** lorsque pour tout $x \in E \backslash \{0_E\}$ on a $q(x) \neq 0$.

Une forme quadratique q est donc définie si son cône isotrope est réduit à $\{0_E\}$, ce qui implique qu'elle est non dégénérée puisque $\mathrm{Ker}(\varphi) \subseteq C_\varphi$.

Définition 11 : Rang d'une application bilinéaire [Rombaldi, p.467] :
On appelle **rang de** φ (ou de q) l'entier $\mathrm{rg}(q) = n - \dim(\mathrm{Ker}(q))$.

Remarque 12 : [Rombaldi, p.467]
En dimension finie, le rang d'une forme quadratique est égal à celui de sa matrice dans une base quelconque. Ainsi, q est non dégénérée si, et seulement si, son rang vaut n.

II.1.2 Bases q-orthogonales

On commence par rappeler le théorème de réduction de Gauss dont la démonstration repose sur une récurrence puis une disjonction de cas en fonctions des coefficients apparaissant dans l'écriture de $q(x)$.

Théorème 13 : Théorème de réduction de Gauss (1) [Rombaldi, p.469] :
Pour toute forme quadratique non nulle q sur E, il existe un entier $r \in [\![1;n]\!]$, des scalaires non nuls $(\lambda_i)_{i\in[\![1;r]\!]}$ et des formes linéaires $(\ell_i)_{i\in[\![1;r]\!]}$ linéairement indépendantes dans E^* tels que pour tout $x \in E$ on ait $q(x) = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j \ell_j^2(x)$.

Exemple 14 : [Rombaldi, p.485]
$*$ On considère $q(x) = -x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)$.

$$\begin{aligned}
q(x) &= -x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) \\
&= -\left(x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3\right) \\
&= -\left(x_1^2 - 2x_1(x_2+x_3) + x_2^2 + x_3^2 - 2x_2x_3\right) \\
&= -\left((x_1 - (x_2+x_3))^2 - (x_2+x_3)^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_2x_3\right) \\
&= -\left((x_1 - x_2 - x_3))^2 - 4x_2x_3\right) \\
&= -\left((x_1 - x_2 - x_3))^2 - \left((x_2+x_3)^2 - (x_2-x_3)^2\right)\right) \\
&= -(x_1 - x_2 - x_3))^2 + (x_2+x_3)^2 - (x_2-x_3)^2
\end{aligned}$$

$*$ On considère $q(x) = -x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)$.

$$\begin{aligned}
q(x) &= x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_1x_4 + x_2x_3 + 4x_2x_4 + 2x_3x_4 \\
&= (x_1 + x_3 + 4x_4)(x_2 + 2x_3 + 2x_4) - 2x_3^2 - 8x_4^2 - 8x_3x_4 \\
&= \frac{1}{4}(x_1 + x_2 + 3x_3 + 6x_4)^2 - \frac{1}{4}(x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4)^2 - 2(x_3 + 2x_4)
\end{aligned}$$

On peut réécrire le théorème de réduction de Gauss matriciellement comme suit :

Théorème 15 : Théorème de réduction de Gauss (2) [Rombaldi, p.473]
Avec les notations du théorème précédent, il existe une base $(f_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ de E dans laquelle la matrice de q est diagonale de la forme $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ (si r est le rang de q, alors les r premiers λ_i sont non nuls et les suivants sont nuls).

Définition 16 : Base q-orthogonale [Rombaldi, p.473] :
Une base $(f_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ comme dans le théorème précédent est appelée **base q-orthogonale**.

Remarque 17 : [Rombaldi, p.473]
Comme une matrice symétrique définit une unique forme quadratique dans la base canonique de $E \cong \mathbb{K}^n$, on en déduit que si A est une matrice symétrique d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$, il existe alors une matrice inversible P telle que la matrice $P^\intercal AP$ soit diagonale.

Théorème 18 : [Rombaldi, p.474]
Avec les notations précédentes, on a $\mathrm{rg}(q) = r$ et :

$$\mathrm{Ker}(q) = \{x \in E \text{ tq } \forall i \in [\![1;r]\!],\ \ell_i(x) = 0\}$$

II.1.3 Signature d'une forme quadratique réelle

En reprenant les résultats du développement et le théorème de réduction de Gauss, on a alors la loi d'inertie de Sylvester :

Théorème 19 : Loi d'inertie de Sylvester [Rombaldi, p.477]
Si q est de signature (s,t), on a alors la décomposition $q = \sum_{j=1}^{s} \ell_j^2 - \sum_{j=s+1}^{s+t} \ell_j^2$, où les ℓ_i sont des formes linéaires indépendantes et il existe une base q-orthogonale de E dans laquelle la matrice de q est $D = \mathrm{diag}(I_s, -I_t, 0_{n-s-t})$.

II.2 Pour aller plus loin...

On sait que l'on peut classifier les formes quadratiques sur $\mathbb{C}$ via le rang uniquement et par le théorème de réduction de Gauss, on peut classifier les formes quadratiques sur $\mathbb{R}$ via la signature. On peut également s'intéresser à la classification des formes quadratiques sur un corps fini :

Soient p un nombre premier impair et φ une forme quadratique non nulle sur le $\mathbb{F}_q$-espace vectoriel E.

Définition 20 : Discriminant d'une forme bilinéaire [Rombaldi, p.463] :
Le discriminant dans une base $\mathcal{B}$ de E de φ est le déterminant de la matrice de φ dans cette base et on le note $\mathrm{disc}_{\mathcal{B}}(q)$.

Théorème 21 : [Rombaldi, p.480]
Si $\alpha \in \mathbb{F}_q^*$ est un non carré fixé et que φ est de rang $r \in [\![1;r]\!]$, alors il existe une base de E dans la quelle matrice de φ est de la forme $D = \mathrm{diag}(I_{r-1}, \delta, 0_{n-r})$ avec $\delta \in \{1;\alpha\}$.

Corollaire 22 : [Rombaldi, p.482]
$*$ Deux formes quadratiques non dégénérées q et q' sur E sont équivalentes si, et seulement si, pour toute base $\mathcal{B}$ de E, le rapport $\frac{\mathrm{disc}_{\mathcal{B}}(q')}{\mathrm{disc}_{\mathcal{B}}(q)}$ est un carré dans $\mathbb{F}_q^*$.
$*$ Il y a dans l'espace vectoriel $Q(E)$ des formes quadratiques sur E, $2n+1$ classes d'équivalence, dont deux de formes quadratiques non dégénérées.

II.3 Recasages

Recasages : 148 - 159 - 170 - 171.

III Bibliographie

— Jean-Étienne Rombaldi, *Mathématiques pour l'agrégation, Algèbre et géométrie*.